



► Миграционный скоростной анализ по высокочастотной асимптотике уравнения двойного корня

Н. Н. Шилов¹, А. А. Дучков²

^{1,2} Новосибирский государственный университет,

^{1,2} Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН

¹ n.shilov@g.nsu.ru, ² DuchkovAA@ipgg.sbras.ru

Введение. Сейсморазведка методом отражённых волн является ведущим методом изучения внутреннего строения Земли, в особенности в целях поиска залежей углеводородов. Основным результатом обработки сейсмических данных являются волновые изображения отражающих границ, причём достоверность этих изображений определяется точностью скоростной модели изучаемого участка [1]. Избыточность данных сейсморазведки позволяет уточнять скоростную модель среды по погрешностям в волновых изображениях – такие подходы называются миграционным скоростным анализом [2]. В данной работе будет изложен новый метод этой группы, основанный на высокочастотной асимптотике одной из аппроксимаций волнового уравнения и являющийся развитием метода регулируемого направленного приёма (РНП) [3; 4]. В тексте доклада будет рассматриваться только двумерная постановка задачи, но предлагаемый подход может быть обобщён и на трёхмерный случай.

Теоретические основы метода. Рассмотрим двумерное пространство $z \geq 0$, в котором задано гладкое распределение скорости упругих волн $v(x, z)$. Пусть на плоскости $z = 0$ в координатах x_s и x_r соответственно расставлены источники и приёмники сейсмических колебаний. Обозначим время пробега отражённой волны между источником и приёмником за $\tau(x_s, x_r, z = 0)$ и рассмотрим поведение этой функции при $z > 0$, т. е. при пересчёте времён пробега в нижнее полупространство. В [5] было показано, что она подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} + \sqrt{\frac{1}{v_s^2} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_s}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{v_r^2} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_r}\right)^2} = 0, \quad (1)$$

где за v_s и v_r обозначены соответственно скорости в источнике и приёмнике, $v(x_s, z)$ и $v(x_r, z)$. Это уравнение описывает кинематику отражённой волны вплоть до отражающей границы при условии, что её лучи нигде не становятся горизонтальными. В [6] по нему строится псевдодифференциальное уравнение двойного корня (англ. *Double Square Root equation*), позволяющее пересчитывать не только времена пробега, но и всё волновое



поле, а в [7] показывается, что изложенная ниже теория есть высокочастотная асимптотика этого уравнения.

По аналогии с классическим лучевым методом [8; 9] уравнение (1) можно решать методами гамильтоновой механики. Для этого определяются векторы **координат** и **медленности** (верхний индекс T указывает на транспонирование):

$$\vec{x} = (x_s, x_r, z)^T, \quad \vec{p} = (p_s, p_r, p_z)^T = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_s}, \frac{\partial \tau}{\partial x_r}, \frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^T, \quad (2)$$

а также **гамильтониан** системы:

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \propto p_z + \sqrt{\frac{1}{v_s^2} - p_s^2} + \sqrt{\frac{1}{v_r^2} - p_r^2}, \quad (3)$$

в котором знаком $\propto$ обозначена пропорциональность. Конкретная форма гамильтониана приведена в [7]. Уравнение (1) выполнено, если гамильтониан равен нулю, и наоборот.

Введённому гамильтониану соответствует **система уравнений луча**, параметризованного временем пробега:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \nabla_{\vec{p}} H, & \nabla_{\vec{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_s}, \frac{\partial}{\partial p_r}, \frac{\partial}{\partial p_z} \right)^T, \\ \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\nabla_{\vec{x}} H, & \nabla_{\vec{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_r}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T. \end{cases} \quad (4)$$

Её решения – пары $\vec{x}(\tau)$, $\vec{p}(\tau)$ – лучи уравнения двойного корня, или просто лучи. В работе [7] показано, как поставить для них начальные условия и трассировать **в обратном времени** от $\tau = \tau^{obs}$ – времени регистрации волны в приёмнике – до $\tau = 0$ – нулевого времени отражения. Формально нулевое время отражения реализуется, когда источник и приёмник расположены в одной и той же точке непосредственно на отражающей границе. Неравенство $x_s|_{\tau=0} \neq x_r|_{\tau=0}$ нарушает **физику** отражения и может свидетельствовать об ошибках в скоростной модели.

Пусть вместо точной скоростной модели задано её приближение $v_0(x, z)$, и в нём по системе (4) были построены K лучей уравнения двойного корня $\vec{x}^k(\tau)$, $\vec{p}^k(\tau)$, $k = \overline{1, K}$. Такие лучи могут **не сойтись** на отражающих границах при $\tau = 0$. Обозначим за h_k величину

$$h_k = (x_r^k - x_s^k)|_{\tau=0} \quad (5)$$



и введём функционал невязки:

$$L = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K h_k^2 \geq 0. \quad (6)$$

Будем искать возмущение скоростной модели в параметрическом виде:

$$v(x, z; \tilde{\mathbf{V}}) = v_0(x, z) + \tilde{v}(x, z; \tilde{\mathbf{V}}), \quad L = L(\tilde{\mathbf{V}}), \quad h_k = h_k(\tilde{\mathbf{V}}), \quad (7)$$

где матрица параметров $\tilde{\mathbf{V}}$ задаёт **возмущение скорости** в узлах фиксированной сетки:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \left\{ \tilde{v}_{mn} \right\}, \quad \tilde{v}(x_m, z_n; \tilde{\mathbf{V}}) = \tilde{v}_{mn}, \quad m = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (8)$$

а между узлами строится интерполяционный бикубический сплайн [10]. Используя методы теории возмущений луча, изложенные в [11; 12], можно рассчитать градиент $L(\tilde{\mathbf{V}})$ и реализовать подбор матрицы $\tilde{\mathbf{V}}$, минимизирующей функционал невязки (6). В нашей работе мы пользуемся алгоритмами *L-BFGS-B* [13] и *SLSQP* [14] из библиотек *SciPy* [15] языка *Python*.

Данные для инверсии. Для лучевого трассирования в обратном времени и расчёта градиента целевого функционала (6) необходимо знать времена пробега отражённых волн и их производные на поверхности наблюдений. Такие же данные нужны в методе РНП [3; 4] и стереотомографии [16], авторы которых разработали методику их извлечения из сейсмограмм до суммирования [17]. В итоге массив данных для инверсии включает в себя следующие значения:

- x_s^{obs} – координата источника;
- x_r^{obs} – координата приёмника;
- τ^{obs} – время регистрации отражённой волны;
- $p_s^{obs} = \frac{\partial \tau_{obs}}{\partial x_s^{obs}}$ – производная времени пробега по координате источника;

ника;

- $p_r^{obs} = \frac{\partial \tau_{obs}}{\partial x_r^{obs}}$ – производная времени пробега по координате приём-

ника;

- $\sigma \in [0, 1]$ – мера когерентности (сембланс) выделенной волны, характеризующая степень уверенности в выделении события на трассе.

Регуляризация функционала невязки. Функционал невязки в форме (6) характеризует неточность скоростной модели при отсутствии ошибок в данных. Такие ошибки неизбежно возникают при анализе сейсмограмм, поэтому по аналогии с [17] мы вводим регуляризированный функционал невязки:

$$\begin{aligned} L_{\sigma}(\tilde{\mathbf{V}}) &= L_h(\tilde{\mathbf{V}}) + L_{v_{mn}}(\tilde{\mathbf{V}}), \quad L_h(\tilde{\mathbf{V}}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K h_k^2 \sigma_k^2 \\ L_{v_{mn}}(\tilde{\mathbf{V}}) &= \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left[v_{mn}^2 + \left(\Delta v(x_m, z_n; \tilde{\mathbf{V}}) \right)^2 (\delta x \delta z)^2 \right] \Delta \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\tau_k^{obs})^2 (1 - \sigma_k)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

в котором к целевой функции были прибавлены члены, ограничивающие сложность скоростной модели. Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ есть оператор Лапласа, δx и δz – шаги по сетке, на которой ищется возмущение скорости, а знак умножения поставлен, чтобы визуально подчеркнуть перемножение сумм. Нормирующие множители подбирались нами эвристически, исходя из следующих соображений:

- размерность функционала невязки (9) должна совпадать с размерностью (6);
- штраф за расхождение источника и приёмника $L_h(\tilde{\mathbf{V}})$ должен быть максимальным для достоверно ($\sigma_k \approx 1$) выделенных событий;
- штраф за возмущения скорости $L_{v_{mn}}(\tilde{\mathbf{V}})$ должен быть максимальным для ненадёжно ($\sigma_k \approx 0$) выделенных событий.

Заметим также, что функционал (9) переходит в (6) при $\sigma_k \rightarrow 1$ для всех $k = \overline{1, K}$.

Двухстадийная оптимизация. Для устойчивого восстановления скоростной модели мы применили двухстадийную стратегию оптимизации, похожую на предложенную в [17]:

- 1) поиск возмущения скорости на сетке из четырёх узлов в углах модели;
- 2) поиск возмущения скорости на подробной сетке.

На первом шаге ищется «почти линейная» скоростная модель, максимально удовлетворяющая сразу всему массиву данных, а на втором – уточняются локальные неоднородности.

Пример инверсии синтетических данных. Для тестирования новых алгоритмов миграции и скоростного анализа часто пользуются моделью «Мармуси» [18]. Авторы метода стереотомографии [16] предложили упрощённый вариант этой модели и предоставили нам синтетические сейсмограммы для инверсии. Эти сейсмограммы были рассчитаны мето-



дом борновского моделирования [19] и включают в себя только однократно рассеянные волны, а истинная скоростная модель не содержит поверхностей разрывов.

На рис. 1 приведены начальное приближение, результат первой стадии инверсии и итоговая скоростная модель, построенные в результате инверсии 2 770 пропикированных отражённых волн с семблансом $\sigma > 0,8$. Поверх скоростных моделей наложены примерные положения отражающих площадок, координаты и ориентация которых находятся из геометрии лучей [3], а прозрачность экспоненциально возрастает с $|h|$ (5). Хорошо видно, как в процессе инверсии фокусируется структурное изображение. Для демонстрации корректности построенной модели была проведена глубинная миграция равных удалений [19], результаты которой изображены на рис. 2. Слева на нём приведены суммарные изображения, получаемые на разных стадиях инверсии, а справа – сейсмограммы общей точки изображения. Видно, что по мере уточнения скоростной модели волны на них выстраиваются в горизонтальные структуры, что свидетельствует о точности подбора скоростей [20].

Пример инверсии реальных данных. Для проверки работоспособности алгоритма в условиях реальной сейсмической съёмки были взяты данные по наземному профилю в Западной Сибири. На сейсмограммах было выделено 3 946 событий с семблансом $\sigma > 0,8$ и проведена инверсия. Её результаты приведены на рис. 3 в том же порядке, что и для инверсии синтетических данных. Хорошо видно, что в верхней (до 1 000 м) горизонтально-слоистой части разреза надёжно прослеживаются многочисленные отражающие границы, а в более глубокой синклинальной структуре – всего три основных горизонта. О достоверности восстанавливаемой скоростной модели можно судить по результатам миграции равных удалений, приведённым на рис. 4. Видно, что включённым в инверсию отражающим горизонтам соответствуют почти горизонтальные структуры на сейсмограммах общей точки изображения, но между ними сохранилось много неспрямлённых границ, которые не были надёжно пропикированы и не были включены в инверсию. Таким образом, вопрос корректной подготовки набора данных требует дальнейшего изучения, хотя уже можно утверждать, что предложенный метод не разошёлся на реальных сейсмограммах.

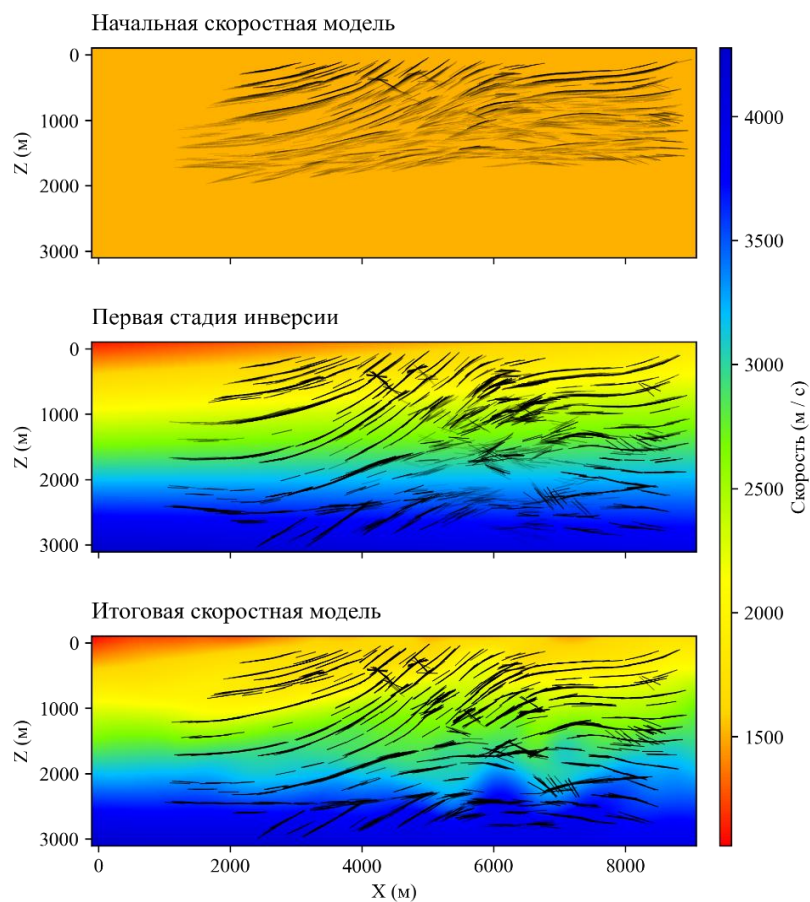


Рис. 1. Скоростные модели с наложенными отражающими площадками, построенные по синтетическим данным

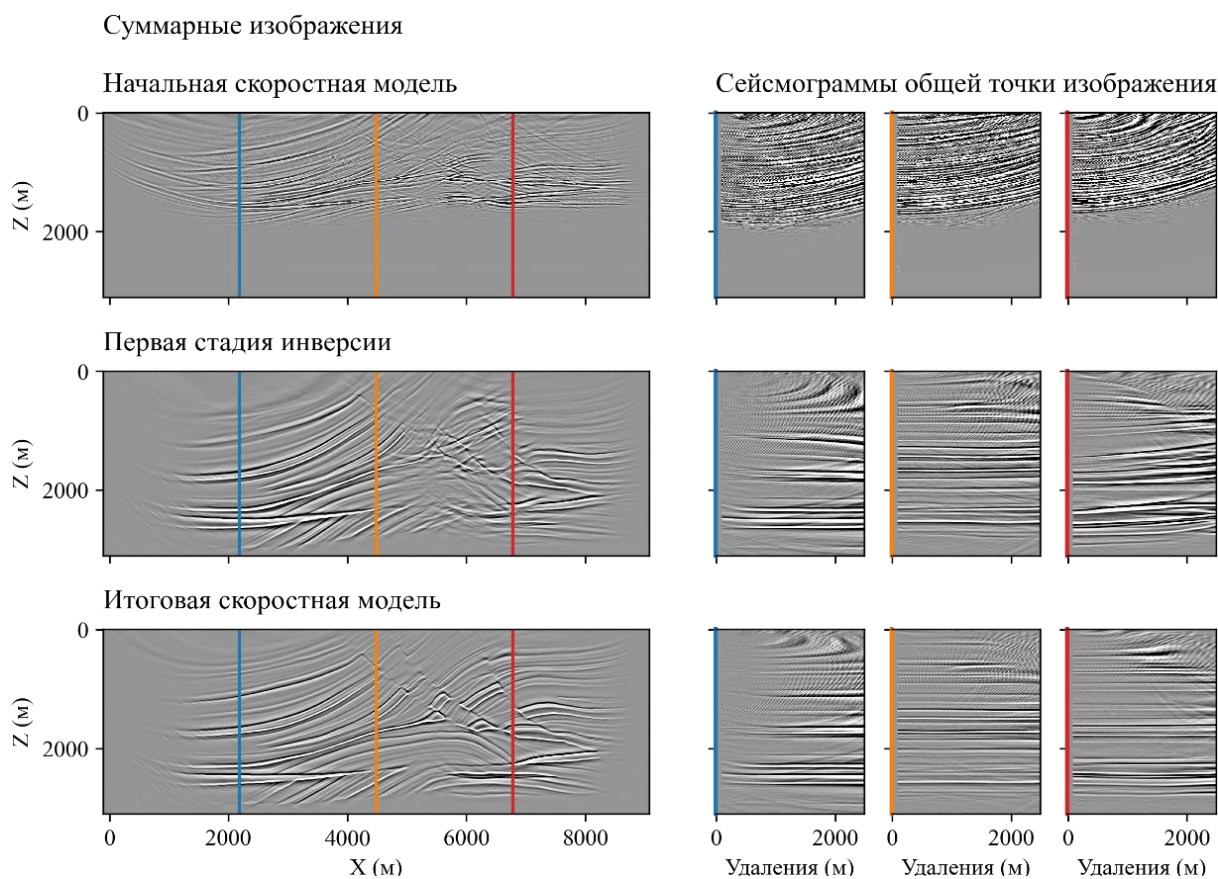


Рис. 2. Результаты глубинной миграции равных удалений по синтетическим данным

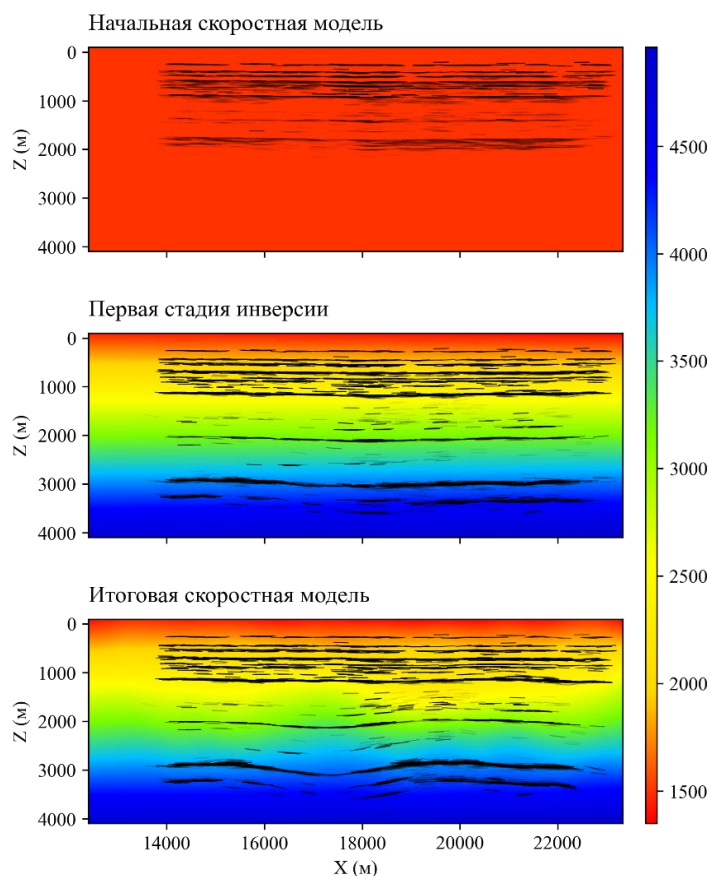


Рис. 3. Скоростные модели с наложенными отражающими площадками, построенные по реальным данным

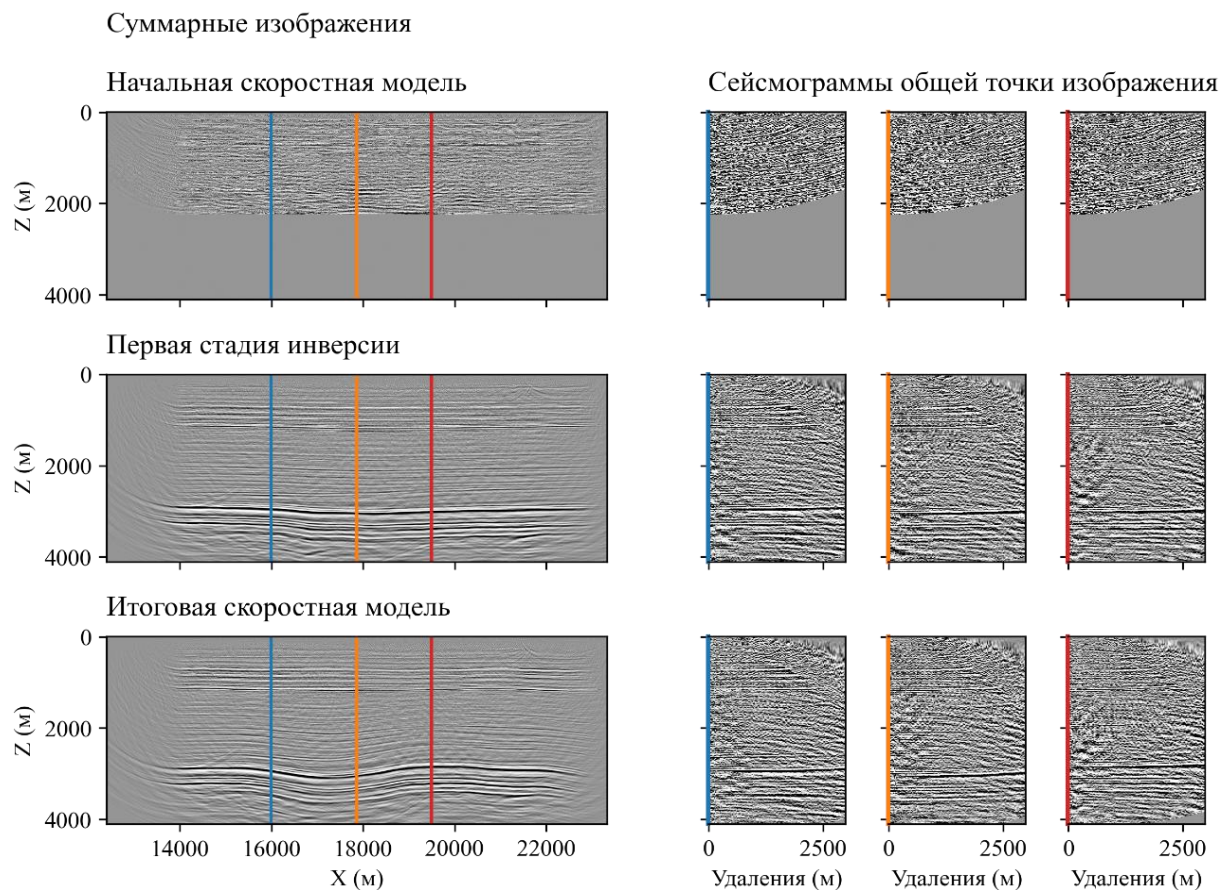


Рис. 4. Результаты глубинной миграции равных удалений по реальным данным



Заключение. В данной работе представлен метод уточнения скоростной модели среды, основанный на высокочастотной асимптотике псевдодифференциального уравнения двойного корня – аппроксимации волнового уравнения, описывающей только субвертикально распространяющиеся волны. В тексте работы приведён вывод функционала невязки и указан метод расчёта его градиента, предложен вариант регуляризации, в котором отдельно оговорены эвристические решения, принятые в этой работе и интересные для дальнейшего изучения. Работоспособность метода продемонстрирована на наборе синтетических и реальных данных.

Благодарности. Исследования проводились в рамках государственных заданий FSUS-2022-0019 и FWZZ-2022-0017.

Список источников

1. Гурвич И. И. Сейсморазведка: учебник / И. И. Гурвич, Г. Н. Боганик. Тверь: АИС, 2006. 744 с.
2. Biondi B. L. 3D Seismic Imaging / B. L. Biondi // Investigations in Geophysics. Society of Exploration Geophysicists, 2006. 247 p.
3. Sword C. H. Tomographic Determination of Interval Velocities from Reflection Seismic Data: the Method of Controlled Directional Reception: Ph. D. Thesis / C. H. Sword. Stanford University, 1987.
4. Рябинкин Л. А. Вопросы регулируемого направленного приёма (РНП) сейсмических волн / Л. А. Рябинкин. М.: Гостоптехиздат, 1957. 165 с.
5. Белоносова А. В. Об одной постановке обратной кинематической задачи сейсмики для двумерной неоднородной среды / А. В. Белоносова, А. С. Алексеев // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. 1967. С. 137–154.
6. Claerbout J. F. Imaging the Earth's Interior / J. F. Claerbout. Blackwell Scientific Publications, 1985. 398 с.
7. Шилов Н. Н. Система динамического лучевого трассирования для уравнения двойного корня: ВКР магистра / Н. Н. Шилов. Новосибирск, 2021. 96 с.
8. Алексеев А. С. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов / А. С. Алексеев, В. М. Бабич, Б. Я. Гельчинский // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1961. Т. 5. С. 3–24.
9. Červený V. Seismic Ray Theory / V. Červený. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 713 p.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. М.: Наука, 1980. 535 с.
11. Шилов Н. Н. Миграционный скоростной анализ по лучевой асимптотике уравнения двойного корня / Н. Н. Шилов, А. А. Дучков // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т. 4 [прин. к публ.].



12. Farra V. Seismic Waveform Modeling in Heterogeneous Media by Ray Perturbation Theory (France) / V. Farra, R. Madariaga // Journal of Geophysical Research. 1987. Vol. 92. Pp. 2 607–2 712.
13. Byrd R. H. A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization / R. H. Byrd et al. // SIAM Journal on Scientific Computing. 1995. Vol. 16. No. 5. Pp. 1 190–1 208.
14. Kraft D. A Software Package for Sequential Quadratic Programming / D. Kraft // Tech. Rep. DFVLR-FB. Wiss. Berichtswesen d. DFVLR. 1988. Vol. 88. No. 28.
15. Virtanen P. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python / P. Virtanen et al. // Nature Methods. 2020. Vol. 17. No. 3. Pp. 261–272.
16. Lambaré G. Stereotomography / G. Lambaré // Geophysics. 2008. Vol. 73. No. 5. Pp. VE25–VE34.
17. Billette F. Practical Aspects and Applications of 2D Stereotomography / F. Billette et al. // Geophysics. 2003. Vol. 68. No. 3. Pp. 1 008–1 021.
18. Brougois A. Marmousi, Model and Data / A. Brougois et al. // EAEG Workshop – Practical Aspects of Seismic Data Inversion. European Association of Geoscientists & Engineers, 1990.
19. Bleistein N. Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion / N. Bleistein, J. K. Cohen, J. W. J. Stockwell. New York: Springer, 2001. Vol. 13. 511 p.
20. Sava P. C. Angle- domain Common- image Gathers by Wavefield Continuation Methods / P. C. Sava, S. Fomel // Geophysics. Society of Exploration Geophysicists. 2003. Vol. 68. No. 3. Pp. 1 065–1 074.